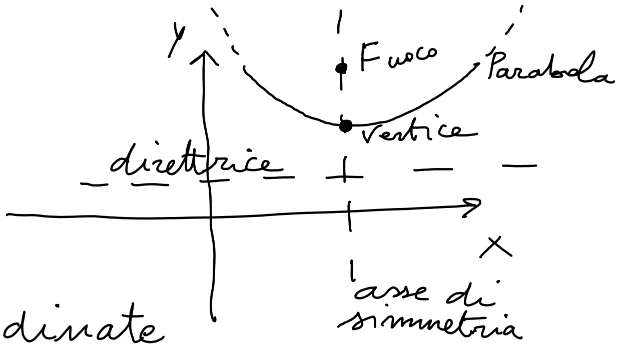
Definizione metrica della parabola

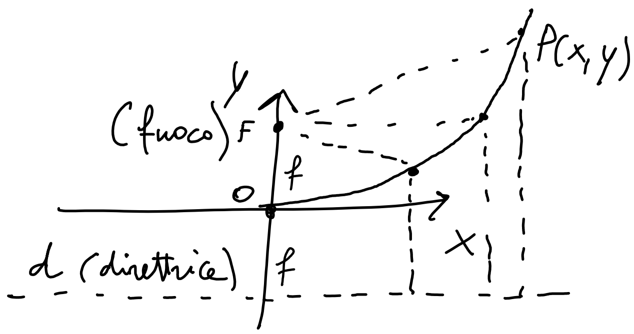
Data una retta (direttrice) e un punto (fuoco) si dice parabola l'insieme dei punti equidistanti da fuoco e direttrice.

La retta passante per il fuoco e perpendicolare alla direttrice si chiama asse di simmetria della parabola.

Il punto di intersezione della parabola con il suo asse di simmetria si chiama vertice della parabola.



Scegliendo un sistema di coordinate cartesiane con l'origine nel vertice e l'asse y coincidente con l'asse della parabola, il fuoco in $F(0,f)$ e la direttrice di equazione $y=-f$, si può ottenere l'equazione della parabola a partire dalla definizione:



$$\overline{PF} = \overline{Pd}$$

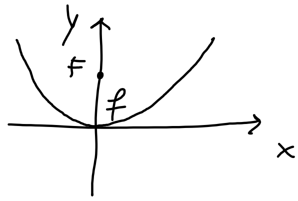
$$\sqrt{x^2+(y-f)^2} = y+f, \quad x^2+(y-f)^2 = (y+f)^2$$

$$x^2+\cancel{y^2}-2yf+\cancel{f^2} = \cancel{y^2}+2yf+\cancel{f^2}, \quad 4fx = x^2$$

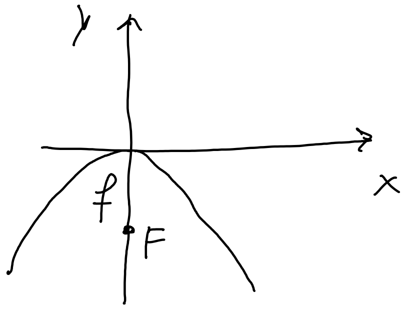
da cui si ottiene: $y = \frac{1}{4f}x^2$

Ponendo $\frac{1}{4f} = a$ si ottiene l'equazione della parabola: $y = ax^2$, con $a = \frac{1}{4f}$.

Se $f>0$ anche $a>0$ e la parabola è rivolta verso l'alto:



Se $f<0$ anche $a<0$ e la parabola è orientata verso il basso:



Esempi

1) Scrivi l'equazione della parabola con il vertice nell'origine e fuoco in $F(0,4)$.

La distanza focale (distanza tra fuoco e vertice) è $f = 4$, quindi $a = \frac{1}{4f} = \frac{1}{16}$.
L'equazione della parabola è: $y = \frac{1}{16}x^2$.

2) Trova l'equazione della direttrice e le coordinate del fuoco della parabola di equazione $y = \frac{1}{4}x^2$.

$a = \frac{1}{4}$, quindi, dalla relazione $a = \frac{1}{4f}$,
si ricava $f = \frac{1}{4a} = \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{4}} = 1$
Il fuoco ha quindi coordinate $F(0,1)$
e la direttrice ha equazione $y = -1$.